SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

EQUAZIONI DI TIPO FUCHS

21-28 GENNAIO 1982

0. EQUAZIONI ORDINARIE

La teoria delle equazioni (ordinarie) di tipo Fuchs è un capitolo classico dell'Analisi (Cfr. il testo di Wasow).

La teoria è stata recentemente inquadrata nell'ambito naturale delle equazioni differenziali a *punti singolari regolari*, attraverso i contributi della scuola francese (Malgrange, Deligne, ecc.) e di quella giapponese (Sato, Komatsu, ecc.).

L'esposizione che segue è fatta in vista di porre in evidenza problemi e tecniche che, in forma assai più complessa, si ripresentano nel caso di equazioni a derivate parziali di tipo Fuchs (su cui riferirà Jeff E. Lewis).

1. EQUAZIONI ORDINARIE DI FUCHS

Un'equazione di Fuchs d'*ordine* m e *peso* m-k (k, m interi, $1 \leq k \leq m$) è un'equazione del tipo:

$$(1.1) \qquad Pu = \left[t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^{k} a_j(t)\, t^{k-j}\, \partial_t^{m-j} + \sum_{i=1}^{m-k} b_i(t)\, \partial_t^{m-k-i} \right] u = f ,$$

dove $\partial_t = d/dt$ ed i coefficienti a_j, b_i, sono funzioni "regolari" (almeno C^∞) su un intervallo aperto $o \in I \subset R$. Non supporremo, contrariamente al solito, che i coefficienti siano analitici.

Un esempio significativo è fornito dall'equazione di Bessel:

$$(1.1)' \qquad B_\nu u = (t^2 \partial_t^2 + t\, \partial_t + t^2 - \nu^2)\, u = f ,$$

dove $\nu \in C$ (l'"ordine" di B_ν).

I problemi di cui vogliamo occuparci qui riguardano: risolubilità (locale) di $Pu = f$, vicino a $t = 0$, quando $f \in C^\infty$ (o f è analitica), ovvero se $f \in \mathcal{D}'$, e struttura delle soluzioni dell'eq. omogenea.

Conviene associare all'operatore il *polinamio indiciale*

$$I_P(z) = z(z-1) \dots (z-m+1) + z(z-1) \dots (z-m+2)\, a_1(0) + \dots + z(z-1) \dots (z-(m-k-1))\, a_k(0)\ , \qquad z \in C\ ; \tag{1.2}$$

tale polinamio si ottiene naturalmente quando si cerchi una soluzione di $t^{m-k}(t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^{k} a_j(0)\, t^{k-j}\, \partial_t^{m-j})\, u(t) = 0$, $t > 0$, nella forma $u(t) = t^z$.

Si noti che se $m = k$ il coefficiente di $a_k(0)$ è 1. Per $m > k$ $I_P(z) = 0$ ha le radici $z = 0,1,\dots,m-k-1$. Nel caso $m = k$ trasformiamo la equazione $Pu = f$ in un sistema *equivalente* secondo lo schema seguente.

Ricordiamo che:

$$t^p\, \partial_t^p = (t\, \partial_t - (p-1))\, (t\, \partial_t - (p-2)) \dots t\, \partial_t, \quad p \geq 2\ .$$

Poniamo:

$$\begin{cases} u_1 = u \\ u_2 = t\, \partial_t\, u_1 = t \cdot \partial_t\, u \\ u_3 = (t\, \partial_t - 1)\, u_2 = (t\, \partial_t - 1)\, t\, \partial_t\, u = t^2\, \partial_t^2\, u \\ \\ u_m = (t\, \partial_t - (m-2))\, u_{m-1} = \dots = t^{m-1}\, \partial_t^{m-1}\, u \end{cases} \tag{1.3}$$

Allora:

$$
(1.4)\quad \begin{cases}
t\,\partial_t\, u_1 = u_2 \\
t\,\partial_t\, u_2 = u_2 + (t\,\partial_t - 1)\, u_2 = u_2 + u_3 \\
t\,\partial_t\, u_3 = 2\, u_3 + (t\,\partial_t - 2)\, u_3 = 2\, u_3 + u_4 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t\,\partial_t\, u_m = (m-1)\, u_m + (t\,\partial_t - (m-1))\, u_m = \\
= (m-1)\, u_m + t^m\, \partial_t^m\, u = \\
= (m-1)\, u_m - \sum_{j=1}^{m} a_j\, (t)\, u_{m-j+1} + f
\end{cases}
$$

e quindi il vettore $\vec{u} = (u_1,\ldots,u_m)$ soddisfa il sistema:

$$
(1.5)\qquad (t\,\partial_t\, I_m - A(t))\, \vec{u} = \vec{f}
$$

Dove $\vec{f} = (0,0,\ldots,0,f)$ e $A(t)$ è la matrice m x m:

$$
(1.6)\ A(t)=\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & & & \cdot & \cdot & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & & \cdot\ \ \cdot & \\
 & & & & & & & \cdot\ \ \cdot & \\
 & & & & & & & m-2 & 1 \\
-a_k(t) & -a_{k-1}(t) & \ldots & & & & & -a_2(t) & -a_1(t) + (m-1)
\end{pmatrix}
$$

Ora è facile vedere che $\det\,(z\, I_m - A(0)) = I_p(z)$.

Consideriamo ora un sistema del tipo sopra indicato, i.e.

(1.7) $$(t\,\partial_t\,I_m - A(t))\,\vec{v} = \vec{g}$$

dove $A(t) \in C^\infty(I;\ L(C^m))$, $o \in I \subset R$, I aperto.

Un modo interessante di affrontare (1.7) è di chiedersi se esista una matrice $C(t) \in C^\infty(J;\ L(C^m))$, $o \in J \subset I$, tale che:

(1.8)
1) $C(o) = I_m$
2) $(t\,\partial_t\,I_m - A(t))\,C(t) = C(t)\,(t\,\partial_t\,I_m - A(o))$, $\forall\ t \in J$.

Per trovare $C(t)$ soddisfacente (1.8), consideriamo la serie di Taylor:

$$A(t) \sim \sum_{l\geq 0} A_l\,t^l,\quad A_l = \frac{1}{l!}\,\partial_t^l\,A(t)|_{t=0}\ ,\quad \text{e cerchiamo}$$

$$C(t) \sim \sum_{l\geq 0} C_l\,t^l.$$

Imporre (1.8) equivale a richiedere:

(1.8)' $$\begin{cases} C_o = I_m \\ t\,\partial_t\,C(t) - [A(t)\,C(t) - C(t)\,A_o] = 0, \quad \text{su } J. \end{cases}$$

Otteniamo così le equazioni matriciali:

(1.9) $$\begin{cases} A_o\,C_o - C_o\,A_o = 0 \\ l\,C_l - \ A_o\,C_l - C_l\,A_o\ \ = \\ = C_l\,A_o - (A_o - l\,I_m)\,C_l = \displaystyle\sum_{j=0}^{l-1} A_{l-j}\,C_j\ ,\quad l \geq 1. \end{cases}$$

La prima di (1.9) è soddisfatta con $C_o = I_m$. Per risolvere le altre equazioni utilizziamo il risultato seguente.

Se F, G sono 2 matrici m x m, affinché l'eq. PF - GP = Q ammetta soluzione (matrice m x m) quale che sia Q (matrice m x m) occorre e basta che $\sigma(F) \cap \sigma(G) = \phi$, i.e. F e G non hanno autovalori comuni. Prova: si tratta di studiare l'iniettività della mappa lineare $P \to PF - GP$. Sia $\sigma(F) \cap \sigma(G) = \phi$ e $PF - GP = 0$. Allora $\forall \lambda \in C$ e $\forall r \in N$ si ha $P(F - \lambda I_m)^r - (G - \lambda I_m)^r P = 0$. Utilizzando il teorema di Jordan, $C^m = \bigoplus_{j=1}^{\nu} \mathrm{Ker}(F - \lambda_j I_m)^{r_j}$, dove $\lambda_1,\dots,\lambda_\nu$ sono gli autovalori distinti di F e r_j è la molteplicità algebrica di λ_j. Se $x \in \mathrm{Ker}(F - \lambda_j I_m)^{r_j}$ si ha $(G - \lambda_j I_m)^{r_j} x = 0$ e quindi $x = 0$ se $\lambda_j \notin \sigma(G)$. Dunque, se $\sigma(F) \cap \sigma(G) = \phi$, $P = 0$. D'altra parte, se $\sigma(F) \cap \sigma(G) \neq \phi$ è facile costruire un esempio di $P \neq 0$ per cui $PF - GP = 0$.

Diremo che *il sistema* $t\,\partial_t I_m - A(t)$ *verifica la condizione di Fuchs se:*

(1.10) $$\sigma(A_o) \cap \sigma(A_o - l\, I_m) = \phi\,, \qquad l = 1,2,\dots$$

(i.e. se gli autovalori distinti di $A_o = A(o)$ non differiscono per degli interi).

Se vale (1.10) le eq. (1.9) per C_l, $l \geq 1$, sono univocamente risolubili e quindi resta definita la serie formale $\sum_{l\geq 0} C_l t^l$. Usando il Lemma di Borel, costruiamo $\hat{C} \in C^\infty(I; L(C^m))$ con $\hat{C}(t) \sim \sum_{l\geq 0} C_l t^l$. Per costruzione:

(1.11) $$t\,\partial_t I_m \hat{C}(t) - [A(t)\hat{C}(t) - \hat{C}(t) A_o] = \Phi(t)$$

è C^∞ e piatta a $t = 0$, i.e. $\partial_t^j \Phi(t)|_{t=0} = 0 \quad \forall j$.

Proviamo ora che fissato $[-T, T] \subset I$, esiste $\Psi \in C^\infty([-T,T]; L(C^m))$, piatta a $t = 0$, per cui risulta $t\,\partial_t \Psi - [A(t)\Psi - \Psi(t) A_o] = -\phi(t)$ su $(-T,T)$. Ponendo allora $C(t) = \hat{C}(t) + \Psi(t)$ siamo a posto.

Se $B(t) \in C^\infty([-T,T]; L(C^m))$, piatta a $t = 0$, poniamo:

$$(1.12) \qquad (E\, B)(t) = \int_0^1 B(\rho t)\, \frac{d\rho}{\rho}$$

E' facile vedere che $E\,B \in C^\infty([-T,T];\, L(C^m))$ ed è piatta a $t = 0$. Si noti che

$$\partial_t^j\, E\, B(t) = \int_0^1 \rho^j\, B^{(j)}(\rho t)\, \frac{d\rho}{\rho}\,.$$

Sicché

$$(1.13) \qquad t\, \partial_t\, E\, B(t) = \int_0^1 t\, B'(\rho t)\, d\rho = B(t).$$

Per $N = 0,1,\ldots,$ poniamo:

$$(1.14) \qquad q_N(B) = \sup_{\substack{|t| \leqq T \\ 0 \leqq j \leqq N}} |t^{-N}\, B^{(j)}(t)|$$

Allora:

$$(1.15) \qquad q_N(E\, B) = \sup_{\substack{|t| \leqq T \\ 0 \leqq j \leqq N}} \left| \int_0^1 (\rho t)^{-N}\, \rho^{N+j}\, B^{(j)}(\rho t)\, \frac{d\rho}{\rho} \right|$$

$$\leqq q_N(B) \int_0^1 \rho^{N+j-1}\, d\rho \leqq \frac{1}{N}\, q_N(B)\,, \quad \text{se } N \geqq 1.$$

Definiamo $K\colon B(t) \to A(t)\, B(t) - B(t)\, A_0$. Usando il metodo di Picard, per risolvere $(t\, \partial_t - K)\, B = -\,\Phi$, poniamo $\Psi_0 = 0$, $\Psi_1 = E\{K(\Psi_0) - \Phi\},\ldots,$ $\Psi_{n+1} = E\{K(\Psi_n) - \Phi\},\ldots$.

Da (1.15) segue che esiste una successione $1 \leqq N_j \uparrow +\infty$ per cui:

$$(1.16) \qquad q_{N_j}(\Psi_{n+1} - \Psi_n) < \frac{1}{2}\, q_{N_j}(\Psi_n - \Psi_{n-1})\,, \quad \forall\, n \geqq 1.$$

Dunque $\{\Psi_n\}$ converge su $C^\infty([-T,T]; L(C^m))$ ad una Ψ, piatta a $t = 0$ che risolve $t\, \partial_t \Psi - K\, \Psi = - \Phi$ su $(-T,T)$.

N.B. Se $A(t) \in A(I; L(C^m))$ e soddisfa la condizione di Fuchs, allora $\sum_{l\geq 0} C_l\, t^l$ converge ad una funzione analitica in un intorno di $t = 0$ (esercizio).

Dunque se vale la condizione di Fuchs, il sistema $t\, \partial_t\, I_m - A(t)$ "equivale" localmente (vicino a $t = 0$) al sistema a coefficienti costanti $t\, \partial_t\, I_m - A(o)$!

Nel caso dell'equazione di Bessel, la condizione di Fuchs significa che $2\,\nu \notin Z$.

Cosa si può dire se la condizione di Fuchs è violata? A patto di commutare $A(t)$ con una opportuna matrice in $G\,L(m; C)$, possiamo supporre dall'inizio che $A(o)$ sia una matrice diagonale a blocchi, del tipo:

$$(1.17) \qquad A(o) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_\nu \end{pmatrix}$$

dove A_j è una matrice $m_j \times m_j$ del tipo:

(1.18) $A_j =$

dove l_j è un intero ≥ 1, $\mu_j \in C$ ed i blocchi in A_j sono in forma di Jordan di certe dimensioni e, infine, $\mu_i - \mu_j \notin Z$ se $i,j = 1,\ldots,\nu$, $i \neq j$.

E' possibile modificare la costruzione precedente e provare che esistono 2 matrici $C(t)$, $\hat{A}(t) \in C^{\infty}(J; L(C^m))$, $o \in J \subset I$, tali che:

1) $C(o) = I_m$ (più in generale $C(o) \in GL(m; C)$).
2) $\hat{A}(t)$ è diagonale a blocchi $\hat{A}_j(t)$, $j = 1,\ldots,\nu$, con $\hat{A}_j(o) = A_j$, $\forall j$.
3) $(t\, \partial_t I_m - A(t))\, C(t) = C(t)\, (t\, \partial_t I_m - \hat{A}(t))$, $t \in J$ (se $A(t)$ è analitica, $C(t)$ e $\hat{A}(t)$ si possono scegliere analitiche).

Ne segue che il sistema $t\, \partial_t I_m - A(t)$ è "equivalente" a ν sistemi *disaccoppiati* $t\, \partial_t I_{m_j} - \hat{A}_j(t)$, $j = 1,\ldots,\nu$. Ci basterà esaminare uno di questi.

Se in $\hat{A}_j(o) = A_j$ si ha $l_j = 1$, allora $t\, \partial_t I_{m_j} - \hat{A}_j(t)$ verifica la condizione di Fuches e quindi è localmente equivalente a $t\, \partial_t I_{m_j} - A_j$.

Consideriamo dunque il caso in cui $l_j > 1$. Per semplificare le notazioni sopprimiamo l'indice j. Se abbiamo il sistema:

(1.19) $$(t\, \partial_t I_m - \hat{A}(t))\, \vec{v} = \vec{f}$$

con

$$(1.19)' \qquad \hat{A}(o) = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\mu & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu\end{matrix} & & \\ & \begin{matrix}\mu-1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu-1\end{matrix} & \\ & & \begin{matrix}\mu-(l-1) & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu-(l-1)\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\mu \in C$, $l \geqq 2$; scriviamo $\vec{v} = (\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_l)$ corrispondentemente alle dimensioni dei blocchi. Utilizzeremo ora un'idea che credo sia di Malgrande(?).

Dico che ponendo:

$$(1.20) \qquad \vec{w}_1 = \vec{v}_1, \dots, \vec{w}_{l-1} = \vec{v}_{l-1}, \ \vec{w}_l = t\,\vec{v}_l$$

il vettore $\vec{w}$ soddisfa un sistema del tipo

$$(1.21) \qquad (t\,\partial_t I_m - \tilde{A}(t))\,\vec{w} = \vec{g}$$

dove $\vec{g} = (\vec{f}_1,\dots,t\,\vec{f}_l)$ e

$$(1.21)' \qquad \tilde{A}(o) = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} \mu & & * \\ & \ddots & \\ o & & \mu \end{matrix} & & & * \\ \hline
& \begin{matrix} \mu-1 & & * \\ & \ddots & \\ o & & \mu-1 \end{matrix} & & * \\ \hline
& & \begin{matrix} \mu-(l-2) & & * \\ & \ddots & \\ o & & \mu-(l-2) \end{matrix} & * \\ \hline
& & & \begin{matrix} \mu-(l-2) & & * \\ & \ddots & \\ o & & \mu-(l-2) \end{matrix}
\end{array}\right)$$

In effetti:

$$t\,\partial_t \vec{v}_j = \sum_{h=1}^{l} B_{jh}(t)\,\vec{v}_h + \vec{f}_j\,, \qquad j = 1,\dots,l$$

con $\qquad \hat{A}(t) = (B_{jh}(t))_{j,h} = 1,\dots,l$

Poiché $\qquad B_{jl}(t)|_{t=0} = 0 \quad$ per $\quad j = 1,\dots,l$, si ha

$B_{jl}(t) = t\,\tilde{B}_{jl}(t)$ per una matrice C^∞ $\tilde{B}_{jl}(t)$. Allora:

$$t\,\partial_t \vec{w}_j = \sum_{h=1}^{l-1} B_{jh}(t)\,\vec{w}_h + \tilde{B}_{jl}(t)\,\vec{w}_l + \vec{f}_j, \quad j = 1,\dots,l-1.$$

Infine

$$\begin{aligned} t\,\partial_t \vec{w}_l &= t\,\partial_t(t\,\vec{v}_l) = \\ &= t\,t\partial_t \vec{v}_l + \vec{w}_l = \\ &= \sum_{h=1}^{l-1} t\,B_{lh}(t)\,\vec{w}_h + (B_{ll}(t) + I)\,\vec{w}_l + t\,\vec{f}_l \end{aligned}$$

A questo punto esiste una matrice invertibile $H \in GL(m; C)$ per cui:

$$(1.22) \qquad \tilde{\tilde{A}}(o) = H^{-1}\,\tilde{A}(o)\,H = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \mu & & * \\ & \ddots & \\ o & & \mu \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} \mu-1 & & * \\ & \ddots & \\ o & & \mu-1 \end{matrix} & \\ & & \ddots \\ & & & \begin{matrix} \mu-(l-2) & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu-(l-2) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

dove i blocchi sono di nuovo in forma di Jordan.

Sicché:

$$(t\,\partial_t\, I_m - \tilde{A}(t))\,H = H(t\,\partial_t\, I_m - \tilde{\tilde{A}}(t))$$

dove $\tilde{\tilde{A}}(t)$ è nella stessa situazione di $\hat{A}(t)$ salvo che gli autovalori sono solo μ, $\mu-1, \dots, \mu-(l-2)$.

Se $l = 2$, allora $t\,\partial_t\, I_m - \tilde{\tilde{A}}(t)$ è "equivalente" localmente (a $t = 0$) al sistema $t\,\partial_t\, I_m - \tilde{\tilde{A}}(o)$. In caso contrario ripetiamo il procedimento ora indicato. Dopo un numero finito di passi arriveremo ad un sistema $t\,\partial_t\, I_m - A^{\#}(t)$ con $A^{\#}(o)$ che ha il solo autovalore μ e quindi soddisfa la condizione di Fuchs. Naturalmente occorre tener presente che il passaggio da $t\,\partial_t\, I_m - \hat{A}(t)$ a $t\,\partial_t\, I_m - A^{\#}(t)$ non avviene mediante una matrice invertibile a $t = 0$!!

2. RISOLUBILITA' IN C^∞ DI UN'EQUAZIONE (ORDINARIA) DI FUCHS

Consideriamo l'operatore di Fuchs (1.1)

$$P = t^k \partial_t^m + \sum_{j=1}^{k} a_j(t)\, t^{k-j}\, \partial_t^{m-j} + \sum_{i=1}^{m-k} b_i(t)\, \partial_t^{m-k-i} \tag{2.1}$$

con $a_j,\ b_i \in C^\infty(I),\ o \in I \subset R.$

Vale il teorema:

Teorema 1. *La mappa* $(P,\gamma)\colon C^\infty(I) \to C^\infty(I) \oplus C^{m-k}$, $u \to (Pu,\ \gamma(u) = (\partial_t^j u|_{t=0})_{o\leq j\leq m-k-1})$ *è un isomorfismo se e solo se* $I_P(z) \neq 0,\ \forall\, z \in \{m-k,\ m-k+1, \ldots\}$ (se $m = k$, si considera solo $P\colon C^\infty(I) \to C^\infty(I)$).

Prova. Dimostriamo la cosa dapprima se $m = k$.

Trasformiamo l'equazione $Pu = f$ nel sistema equivalente:

$$(t\, \partial_t\, I_m - A(t))\, \vec{u} = \vec{f} \tag{2.2}$$

come nella sez. 1.

Dire che $P\colon C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ è suriettivo equivale a dire che $t\,\partial_t\, I_m - A(t)\colon C^\infty(I)^m \to C^\infty(I)^m$ è suriettiva. Se $(t\,\partial_t\, I_m - A(t))\,\vec{u} = \vec{f}$, allora $A(o)\,\vec{u}(o) = \vec{f}(o)$.

Per l'arbitrarietà di $\vec{f}(o)$, ne segue che $o \notin \sigma(A(o))$, i.e. $I_P(z) \neq 0$ per $z = 0$. Derivando il sistema:

$$\vec{u}'(t) + t\,\vec{u}''(t) - A'(t)\,\vec{u}(t) - A(t)\,\vec{u}'(t) = \vec{f}'(t)$$

e quindi $\quad (I_m - A(o))\,\vec{u}'(o) = \vec{f}'(o) + A'(o)\,\vec{u}(o).$

Per l'arbitrarietà di $\vec{f}'(o)$, ne segue che $1 \notin \sigma(A(o))$, i.e. $I_P(1) \neq 0$. Proseguendo così si prova che $I_P(z) \neq 0$ se $z \in \{0,1,\dots\}$.

Proviamo ora che se $I_P(z) \neq 0$ quando $z \in \{0,1,2,\dots\}$ allora $P: C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ è un isomorfismo.

Unicità. Prendiamo $u \in C^\infty(I)$ e proviamo che se $Pu(t) = 0$ allora $u = 0$. Basterà provarlo per $t \geq 0$. Se $Pu = 0$, allora $u \in C^\infty(I)$ ed è piatta a $t = 0$. Dunque $\forall N > 0$, $u(t) = t^N v_N(t)$ per una $v_N \in C^\infty$ piatta a $t = 0$. Ora:

$$(t\,\partial_t - A(t))\,[t^N \vec{v}_N(t)] =$$
$$= t^N\,[t\,\partial_t \vec{v}_N(t) - (A(t) - N\,I_m)\,\vec{v}_N(t)] = 0$$

e quindi:

$$(t\,\partial_t I_m - (A(t) - N\,I_m))\,v_N(t) = 0 \quad \text{per } t > 0. \tag{2.3}$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2}\,t\,\frac{d}{dt}\,|v_N(t)|^2 = (\mathrm{Re}(A(t) - N\,I_m)\,v_N(t),\,v_N(t)).$$

Se $N > 0$ è abbastanza grande $(\mathrm{Re}(A(t) - N\,I_m)\,v_N(t),\,v_N(t)) \leq -\,C_N|v_N(t)|^2$ per $t \in [0,T]$, con $C_N \to +\infty$, $N \to +\infty$. Fissati $o < \varepsilon < t < T$:

$$\frac{1}{2}\int_\varepsilon^t s\,\frac{d}{ds}\,|v_N(s)|^2\,ds \leq -\,C_N \int_\varepsilon^t |v_N(s)|^2\,ds$$

i.e.

$$\frac{1}{2}\,(t\,|v_N(t)|^2 - \varepsilon\,|v_N(\varepsilon)|^2) \leq -\,(C_N - \tfrac{1}{2}) \int_o^t |v_N(s)|^2\,ds$$

Se ne deduce che $v_N(t) = 0$ su $[0,T]$ (se $C_N > \frac{1}{2}$). Dunque $u(t)$ è nulla su un intorno $[0,T]$ di 0.

Per la teoria classica si ha allora $u(t) = 0$ su I.

<u>Esistenza</u>. Supponiamo dapprima che il sistema $t\,\partial_t I_m - A(t)$ verifichi la condizione di Fuchs. Allora risolvere $(t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$ equivale a risolvere $(t\,\partial_t I_m - A(o))\,\vec{w}(t) = C(t)^{-1}\,\vec{f}$ in un intervallo $[-T,T] \subset I$ e porre poi $\vec{u} = C(t)\,\vec{w}$.

Dopo questo $\vec{u}(t)$ si prolunga in una soluzione definita su I.

Vogliamo dunque risolvere

$$(t\,\partial_t I_m - A(o))\,\vec{w}(t) = \vec{g}(t) \tag{2.4}$$

su un intervallo $[-T,T] \subset I$, supponendo $\vec{g} \in C^\infty(I)^m$ e $\sigma(A(o)) \cap \{0,1,2,\ldots\} = \phi$.

Senza minore generalità possiamo ridurci al caso in cui $\sigma(A(o)) \subset \{z \in C \mid \mathrm{Re}\ z < 0\}$. Infatti poniamo

$$\begin{aligned} \vec{w}(t) &= \sum_{0}^{N-1}{}_j \frac{\vec{w}_j}{j!}\,t^j + t^N\,\vec{v}(t) \\ \vec{g}(t) &= \sum_{0}^{N-1}{}_j \frac{\vec{g}_j}{j!}\,t^{j'} + t^N\,\vec{h}(t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

dove $\vec{w}_j = \partial_t^j\,\vec{w}|_{t=0}$, $\vec{g}_j = \partial_t^j\,g|_{t=0}$. Se vale (2.4) si ha:

$$(j\,I_m - A(o))\,\vec{w}_j = \vec{g}_j\ , \qquad j = 0,1,\ldots \tag{2.6}$$

Sicché:

$$\begin{aligned} (t\,\partial_t I_m - A(o))\,(t^N\,\vec{v}) &= t^N\,[t\,\partial_t\,\vec{v} - (A - N\,I_m)\,\vec{v}] \\ &= \vec{g} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!}\,[(j\,I_m - A(o))\,\vec{w}_j]\,t^j = t^N\,\vec{h}(t). \end{aligned}$$

Se quindi sappiamo risolvere:

$$(2.7) \qquad (t\,\partial_t\, I_m - A(o))\,\vec{v} = \vec{h}\,,$$

basterà definire

$$(2.8) \qquad \vec{w}(t) = \sum_{0}^{N-1}{}_j\ \frac{1}{j!}\ [(j\, I_m - A(o))^{-1}\,\vec{g}_j]\ t^j + t^N\,\vec{v}$$

per avere che (2.4) vale. Se N è grande $\sigma(A(o) - N\, I_m) \subset \{z \in C \mid Re\ z < 0\}$.

Dunque, senza minore generalità, risolviamo (2.4) supponendo che $\sigma(A(o)) \subset \{z \mid Re\ z < 0\}$. Definiamo

$$(2.9) \qquad \rho^{-A(o)-I} = e^{-(A(o)+I)\ln \rho} \qquad \rho \in\,]0,1]\,.$$

e poniamo

$$(2.11) \qquad E\,\vec{g}(t) = \int_0^1 \rho^{-A(o)-I}\,\vec{g}(\rho t)\, d\rho\,.$$

E' chiaro che $E\,\vec{g} \in (C^\infty)^m$ e, di più:

$$t\,\partial_t\, E\,\vec{g}(t) = \int_0^1 \rho^{-A(o)}\ t\,\vec{g}\,'(\rho t)\, d\rho =$$

$$= \int_0^1 \rho^{-A(o)}\ \frac{d}{d\rho}\ [\vec{g}(\rho t)]\, d\rho =$$

$$= \rho^{-A(o)}\,\vec{g}(\rho t)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} + A(o)\int_0^1 \rho^{-A(o)-I}\,\vec{g}(\rho t)\, d\rho =$$

$$= A(o)\, E\,\vec{g}(t) + \vec{g}(t)$$

(N.B. $\rho^{-A(o)} \to 0$, $\rho \to 0+$!).

Il risultato è dunque provato nell'ipotesi che sia soddisfat-

ta la condizione di Fuchs. Supponiamo ora che la condizione non sia soddisfatta. Basta evidentemente studiare la risolubilità in $C^\infty(I)^m$ di un sistema $(t\,\partial_t\, I_m - \hat{A}(t))\,\vec{u} = \vec{f}$ con $\hat{A}(t)$ come in (1.19)!

Abbiamo visto come ad esso si possa associare un sistema $(t\,\partial_t\, I_m - A^{\#}(t))\,\vec{w} = \vec{g}$ che soddisfa la condizione di Fuchs. Dunque, data $\vec{g}$, siccome $\sigma(A^{\#}(o)) = \{\mu\} \cap \{0,1,\dots\} = \phi$, tale sistema ha una soluzione C^∞ $\vec{w}(t)$ definita su un intervallo $[-T,T] \subset I$. Eseguendo su $\vec{w}$ le trasformazioni a ritroso siamo a posto. Mi limito a farlo vedere nel caso $l = 2$, i.e.

$$\hat{A}(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

con $\quad B_{12}(o) = B_{21}(o) = 0$ e $B_{11}(o) = \begin{bmatrix} \mu & * \\ o & \mu \end{bmatrix}$,

$B_{22}(o) = \begin{bmatrix} \mu-1 & * \\ o & \mu-1 \end{bmatrix}$. Per costruzione, abbiamo trovato $(\vec{w}_1(t), \vec{w}_2(t)) \in C^\infty$ tale che

$$\begin{cases} t\,\partial_t\, \vec{w}_1(t) = B_{11}(t)\,\vec{w}_1(t) + \tilde{B}_{12}(t)\,\vec{w}_2(t) + \vec{f}_1 \\ t\,\partial_t\, \vec{w}_2(t) = t\,B_{21}(t)\,\vec{w}_1(t) + (B_{22}(t) + I)\,\vec{w}_2(t) + t\,\vec{f}_2 \end{cases}$$

dove $t\,\tilde{B}_{12}(t) = B_{12}(t)$. La seconda equazione dà

$$(t\,\partial_t\, I - (B_{22}(t) + I))\,\vec{w}_2(t) = t\,[B_{21}(t)\,\vec{w}_1(t) + \vec{f}_2]$$

Dunque $-(B_{22}(o) + I)\,\vec{w}_2(o) = 0$, ma $B_{22}(o) + I$ è invertibile, e quindi $\vec{w}_2(o) = 0$, sicché $\vec{w}_2(t) = t\,\vec{u}_2(t)$ per una $\vec{u}_2(t) \in C^\infty$ e pertanto; se $\vec{u}_1 = \vec{w}_1$:

$$\begin{cases} t\,\partial_t\,\vec{u}_1 = B_{11}(t)\,\vec{u}_1(t) + B_{12}(t)\,\vec{u}_2(t) + \vec{f}_1(t) \\ t\,\partial_t\,\vec{u}_2 = B_{21}(t)\,\vec{u}_1(t) + B_{22}(t)\,\vec{u}_2(t) + \vec{f}_2(t) \end{cases}$$

i.e. $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ soddisfa $(t\,\partial_t\, I_m - \hat{A}(t))\,\vec{u} = \vec{f}$.

Questo discorso può essere ripetuto nel caso $l > 2$, provando la tesi. Sia ora $m \geqslant k$.

Sia $\phi \in C^\infty(I)$ e consideriamo $P(t^{m-k}\,\phi)$. Non è difficile vedere che esiste un operatore Fuchsiano $\tilde{P}$ d'ordine m e peso δ tale che

$$(2.12)\qquad \begin{cases} P(t^{m-k}\,\phi) = \tilde{P}(\phi)\ ,\ \forall\,\phi \in C^\infty(I) \\ I_{\tilde{P}}(z) = I_P(z+m-k), \qquad z \in C \end{cases}$$

Proviamo ora che se $I_P(\zeta) \neq 0$ per $\zeta \in \{m-k, m-k+1, \dots\}$ allora la mappa:

$$(2.13)\qquad (P,\gamma) : C^\infty(I) \to C^\infty(I) \oplus C^{m-k}$$

$$u \to \Big(Pu,\ \gamma u = \sum_{j\,0}^{m-k-1} \frac{\partial_t^j\, u|_{t=0}}{j!}\, t^j\Big)$$

è un isomorfismo.

Se $(P,\gamma)\,u = 0$ allora u è del tipo $u = t^{m-k}\,\phi$ per una $\phi \in C^\infty(I)$, sicché $Pu = 0$ $\tilde{P}\phi = 0$. Ma $I_{\tilde{P}}(z) \neq 0$ per $z \in \{0,1,\dots\}$ (per (2.12)), sicché $\phi = 0$, i.e. $u = 0$.

Sia ora

$$f \in C^\infty(I) \quad e \quad \sum_{j=0}^{m-k-1}{}_j\ \frac{c_j}{j!}\, t^j \in C^{m-k}$$

Scegliamo $\phi \in C^\infty(I)$ per cui

$$\tilde{P}\phi = f - P\left(\sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!}\right) t^j \quad . \text{ Allora } P\left[\sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j + t^{m-k}\phi\right] =$$

$$= f \text{ e } \gamma\left[\sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j + t^{m-k}\phi\right] = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{c_j}{j!} t^j \ .$$

Viceversa sia

$$(P,\gamma) : C^\infty(I) \to C^\infty(I) \oplus C^{m-k}$$

un isomorfismo (anzi sia su). Allora data $f \in C^\infty(I)$ sia $u \in C^\infty(I)$ con $Pu = f$ e $\gamma(u) = 0$. Allora $u = t^{m-k}\phi$ per una certa ϕ, quindi $Pu = \tilde{P}\phi = f$, i.e. $\tilde{P}$ è suriettivo e quindi $I_{\tilde{P}}(z) \neq 0$ per $z \in \{0,1,\dots\}$, i.e. $I_P(\zeta) \neq 0$ per $\zeta \in \{m-k, m-k+1,\dots\}$.

q.e.d.

Nel caso in cui P abbia coefficienti analitici lo stesso Teorema 1 vale ove si sostituisca $A(I)$ a $C^\infty(I)$.

Per l'equazione di Bessel il Teorema 1 si applica se $\nu \notin Z$.

3. RISOLUBILITA' LOCALE IN $\mathcal{D}'$ DI UNA EQUAZIONE (ORDINARIA) DI FUCHS

Il Teorema 1, nel caso $m = k$, da una condizione necessaria di risolubilità locale in C^∞ per l'equazione $Pu = f$.

Tuttavia, l'equazione è localmente risolubile, per $f \in C^\infty$, anche se $I_P(z)$ è nullo per qualche $z \in \{0,1,\dots\}$.

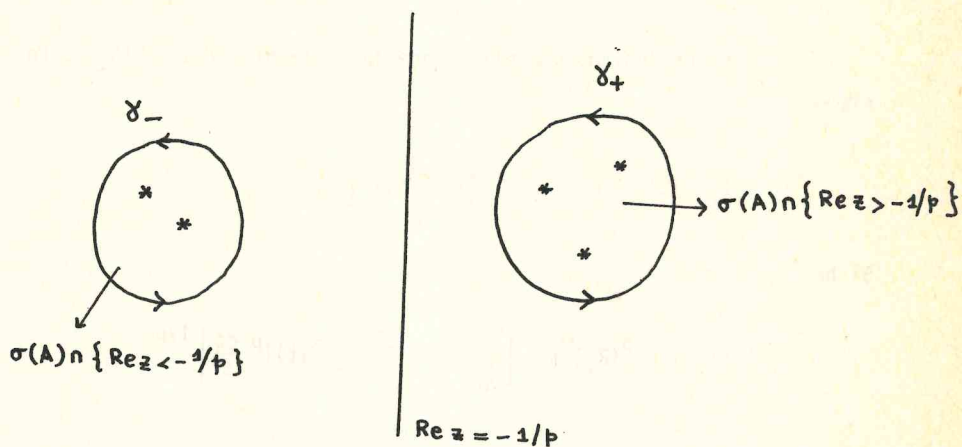
A tal fine utilizziamo il Lemma seguente.

Lemma 1. *Si consideri il sistema* $t\,\partial_t I_m - A$ *dove* A *è una matrice* $m \times m$ *complessa e sia* $p \in (1, +\infty)$ *tale che* $\sigma(A) \cap \{z \in C \mid \mathrm{Re}\, z = -1/p\} = \phi$; *allora per ogni* $\vec{f} \in L^p(R)^m$ *esiste unica* $\vec{u} \in L^p(R)^m$ *tale che:*

1) $t\,\partial_t\,\vec{u} \in L^p(R)^m$
2) $(t\,\partial_t\,I_m - A)\,\vec{u} = \vec{f}$ su $\mathcal{D}'(R)^m$

Prova. Indichiamo con Π_+, Π_- i proiettori:

(3.1) $$\Pi_\pm = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\gamma_\pm} (z - A)^{-1}\,dz$$

con $\gamma_\pm$ come in figura

Si ha $\Pi_+ + \Pi_- = I_m$, $\Pi_+\,\Pi_- = \Pi_-\,\Pi_+ = 0$
e definiamo:

(3.2) $$\rho^A = e^{A\ln\rho} = \frac{1}{2\Pi i}\int_\gamma \rho^z\,(z - A)^{-1}\,dz\ , \quad \rho > 0\ ,$$

dove γ racchiude (in senso antiorario) $\sigma(A)$.

Se $\vec{f} \in C_0^\infty(0, +\infty)^m$ poniamo, per $t > 0$:

$$(3.3) \qquad E\,\vec{f}(t) = \int_0^t (\Pi_- \circ (\tfrac{t}{s})^A)\,\vec{f}(s)\,\frac{ds}{s} +$$

$$- \int_t^{+\infty} (\Pi_+ \circ (\tfrac{t}{s})^A)\,\vec{f}(s)\,\frac{ds}{s}$$

L'integrale converge giacché $\vec{f}$ è nulla vicino a o ed a $+\infty$. Risulta

$$t\,\partial_t\,E\,\vec{f}(t) = (\Pi_- + \Pi_+)\,\vec{f}(t) + A\,E\,\vec{f}(t) = \vec{f}(t) + AE\,\vec{f}(t)$$

Ci proponiamo ora di stimare la norma di $E\,\vec{f}$ in $L^p(R_+)^m$. Poniamo

$$E_-\,\vec{f}(t) = \int_0^t [\Pi_- \circ (\tfrac{t}{s})^A]\,\vec{f}(s)\,\frac{ds}{s}\,.$$

Si ha

$$\| E_-\,\vec{f};\ L^p(R_+)^m \| = \left[\int_0^{+\infty} |t^{1/p}\,E_-\,\vec{f}(t)|^p\,\frac{dt}{t} \right]^{1/p}$$

Ora

$$(3.4) \qquad t^{1/p}\,E_-\,\vec{f}(t) = \int_0^t [\Pi_- \circ (\tfrac{t}{s})^{A+1/p\,I}]\,s^{1/p}\,\vec{f}(s)\,\frac{ds}{s}$$

Dunque $t^{1/p}\,E_-\,\vec{f}(t)$ è la convoluzione su R_+ con la misura $\frac{dt}{t}$ di $s^{1/p}\,\vec{f}(s)$ con la matrice

$$(3.5) \qquad K_-(\sigma) = \begin{cases} \Pi_- \circ \sigma^{A+1/p\,I} & , \quad \sigma \geq 1 \\ 0 & , \quad 0 < \sigma < 1 \end{cases}$$

Per il Teorema di Hausdorff-Young:

$$(3.6) \qquad \| E_- \vec{f}; L^p(R_+)^m \| \leq$$

$$\leq \left(\int_1^{+\infty} \| \Pi_- \circ \sigma^{A+1/p\, I} \| \frac{d\sigma}{\sigma} \right) \| \vec{f}; L^p(R_+)^m \|$$

Ora

$$\Pi_- \circ \sigma^{A+1/p\, I} = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\gamma_-} \sigma^{\zeta+1/p\, I} (\zeta - A)^{-1} d\zeta , \qquad \sigma \geq 1$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \| \Pi_- \circ \sigma^{A+1/p\, I} \| \frac{d\sigma}{\sigma} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\Pi} \int_{\gamma_-} |(\zeta - A)^{-1}| \left[\int_1^{+\infty} \sigma^{\mathrm{Re}\, \zeta+1/p^{-1}} \right] d\sigma \quad d|\zeta| \leq C$$

perché sul compatto γ_- $\mathrm{Re}\, \zeta + 1/p < 0$ e $(\zeta - A)^{-1}$ è limitata.

In modo del tutto analogo, ponendo

$$E_+ \vec{f}(t) = - \int_t^{+\infty} [\Pi_+ \circ (\frac{t}{s})^A] \vec{f}(s) \frac{ds}{s} ,$$

si prova che:

$$(3.7) \qquad \| E_+ \vec{f}; L^p(R_+)^m \| \leq C \quad \| \vec{f}; L^p(R_+)^m \|$$

per una $C > 0$ indipendente da $\vec{f}$. Poiché $C_0^\infty(R_+)^m$ è denso in $L^p(R_+)^m$ se ne conclude che

$$(3.8) \qquad E : L^p(R_+)^m \to L^p(R_+)^m$$

con continuità. Inoltre $(t\, \partial_t\, I_m - A)\, E\, \vec{f} = \vec{f}$ nel senso delle distribuzio_

ni su $(o, +\infty)$, $\forall \vec{f} \in L^p(R_+)^m$. E' chiaro che $A\, E\, \vec{f} \in L^p(R_+)^m$ e quindi $t\, \partial_t\, \vec{f} \in L^p(R_+)^m$.

Dimostriamo, incidentalmente, ora che se $\vec{u} \in L^p(R_+)^m$ e $(t\, \partial_t\, I_m - A)\, \vec{u} = 0$ in senso debole, su $(o, +\infty)$, allora $\vec{u} = 0$.

Data $\vec{\phi} \in C_o^\infty(R_+)^m$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle t\, \partial_t\, \vec{u} - A\, \vec{u}\, , \vec{\phi} \rangle = \\
&= - \langle \vec{u}\, , {}^t A\, \vec{\phi} \rangle - \langle \vec{u}\, , \partial_t (t\, \vec{\phi}) \rangle = \\
&= - \langle \vec{u}\, , t\, \partial_t\, \vec{\phi} + ({}^t A + I_m)\, \vec{\phi} \rangle
\end{aligned}
$$

Ora $- ({}^t A + I_m)$ ha lo spettro disgiunto da $\{z \in C \,|\, \text{Re } z = -1/q\}$, $1/p + 1/q = 1$. Dunque, assegnata $\vec{v} \in L^q(R_+)^m$ esiste $\vec{\phi} \in L^q(R_+)^m$ per cui $t\, \partial_t\, \vec{\phi} + ({}^t A + I_m)\, \vec{\phi} = \vec{v}$. Allora

$$
\begin{aligned}
- \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= - \langle \vec{u}, t\, \partial_t\, \vec{\phi} + ({}^t A + I_m)\, \vec{\phi} \rangle \\
&= - \langle A\, \vec{u}, \vec{\phi} \rangle - \langle \vec{u}, \partial_t (t\, \vec{\phi}) \rangle .
\end{aligned}
$$

Ora $\quad \vec{u} \cdot \vec{\phi} \in L^1(R_+)$, $\partial_t (\vec{u} \cdot t \vec{\phi}) \in L^1(R_+)$

Dunque $\quad o = \displaystyle\int_o^{+\infty} \partial_t (\vec{u} \cdot t\, \vec{\phi}) = \langle t\, \partial_t\, \vec{u}, \vec{\phi} \rangle + \langle \vec{u}, \partial_t (t\, \vec{\phi}) \rangle$

e quindi:

$$
- \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle t\, \partial_t\, \vec{u} - A\, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0
$$

Conclusione, per l'arbitrarietà di $\vec{v}$, $\vec{u} = 0$.

(N.B. se $T < +\infty$ in generale l'unicità salta!).

Sia ora $\vec{f} \in L^p(R)^m$ e sia $\vec{u}_+ \in L^p(R_+)^m$ con $t\,\partial_t \vec{u}_+ - A\vec{u}_+ = \vec{f}$ su $(o, +\infty)$ in senso debole.

Sia poi $\vec{v} \in L^p(R_+)^m$ tale che, posto $\vec{g}(t) = \vec{f}(-t)$, $t > 0$, riesca $t\,\partial_t \vec{v} - A\vec{v} = \vec{g}$ su $(o, +\infty)$. Allora, posto $\vec{u}_-(t) = \vec{v}(-t)$, $t \in (-\infty, o)$, risulta:

$$t\,\partial_t \vec{u}_-(t) = (-t)\,\vec{v}\,'(-t) = A\,\vec{v}(-t) + \vec{g}(-t) = A\,\vec{u}_-(t) + \vec{f}(t)\ .$$

Infine poniamo

$$\vec{u}(t) = \begin{cases} u_+(t)\ , & o < t < +\infty \\ u_-(t)\ , & -\infty < t < o \end{cases}$$

allora $\vec{u} \in L^p(R)^m$ di più $t\,\partial_t \vec{u} - A\,\vec{u} = \vec{f}(t)$ su $(-\infty, +\infty)$ perché, se $\vec{\phi} \in C_o^\infty(R)^m$:

$$< t\,\partial_t \vec{u} - A\,\vec{u}, \vec{\phi} > = -< A\,\vec{u}, \vec{\phi} > - \int_o^{+\infty} \vec{u}(t\,\vec{\phi}\,' + \vec{\phi})\,dt$$

$$- \int_{-\infty}^{o} \vec{u}(t\,\vec{\phi}\,' + \vec{\phi})\,dt\ ;$$ ora $\vec{u} \cdot t\,\vec{\phi} \in L^1(R^\pm)$ e

$\partial_t(\vec{u} \cdot t\,\vec{\phi}) \in L^1(R^\pm)$ e quindi, come sopra,

$$< t\,\partial_t \vec{u} - A\,\vec{u}, \vec{\phi} > = < \vec{f}, \vec{\phi} >\ .$$

q.e.d.

Corollario 1. *Dato il sistema* $t\,\partial_t I_m - A(t)$, $A(t) \in C^\infty(I; L(C^m))$, *si supponga che per un* $p \in (1, +\infty)$, $\sigma(A(o)) \cap \{Re\ z = -1/p\} = \phi$. *Allora* $\exists\, T \in\,]o, +\infty[$ *tale che per ogni* $\vec{f} \in L^p(R)^m$ *esiste* $\vec{u} \in L^p(R)^m$ *per cui:*

(3.9) $$t\,\partial_t \vec{u} - A(t)\,\vec{u} = \vec{f}(t) \quad \textit{su} \quad (-T,T)\ .$$

Prova. Sia $T > 0$ e χ_T la funzione caratteristica di $[-T,T]$. Se $\vec{f} \in L^p(-T,T)^m$ e consideriamo $E\,\chi_T\,\vec{f}$, con E definito in (3.3), si ha:

$$(t\,\partial_t I_m - A(t))\,E\,\chi_T\,\vec{f} =$$

$$= (t\,\partial_t I_m - A(o) - t\,B(t))\,E\,\chi_T\,\vec{f} =$$

$$= \chi_T\,\vec{f} - t\,B(t)\,E\,\chi_T\,\vec{f}\ ,$$

dove $$B(t) = \frac{(A(t) - A(o))}{t} \in C^\infty(I;\ \mathcal{L}(C^m)).$$ Ora

$$\|t\,B(t)\,E\,\chi_T\,\vec{f};\ L^p(-T,T)^m\| \le$$

$$\le C\,T \sup_{|t|\le T} |B(t)|\ \|\chi_T\,\vec{f};\ L^p(R)^m\| \le$$

$$\le C\,T \sup_{|t|\le T} |B(t)|\ \|\vec{f};\ L^p(-T,T)^m\|$$

con $C > 0$ indipendente da T ed $\vec{f}$. Pertanto se $T < \bar{T}$ risulta che la norma di $t\,B(t)\,E\,\chi_T$ come operatore da $L^p(-T,T)^m$ in sè è $< 1/2$, sicché $I_m - t\,B(t)\,E\,\chi_T$ è invertibile su $L^p(-T,T)^m$.

Sia dunque assegnata $\vec{g} \in L^p(R)^m$ e posto $\vec{f} = \vec{g}|_{[-T,T]}$, sia $\vec{\phi} \in L^p(-T,T)^m$ tale che $(I_m - t\,B(t)\,E\,\chi_T)\,\vec{\phi} = \vec{f}$. Ponendo $\vec{u} = \chi_T\,\vec{\phi}$ si ha $\vec{u} \in L^p(R)^m$ e $(t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{u} = \vec{g}$ su $(-T,T)$.

q.e.d.

Corollario 2. *Dato* $t\,\partial_t I_m - A(t)$ *con* $\sigma(A(o)) \cap \{\mathrm{Re}\, z = -1/p\} = \phi$, *per un* $p \in (1, +\infty)$, *assegnata* $\vec{f} \in C^\infty(I)^m$ *esiste* $\vec{u} \in L^p_{loc}(I)^m \cap C^\infty(I \setminus \{o\})^m$ *tale che* $(t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{u} = \vec{f}$ *su* I.

Prova. Sappiamo già che esiste $\vec{v} \in L^p(-T,T)^m$, con $T > 0$ opportuno, $(-T,T) \subset I$, tale che $(t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{v} = \vec{f}$ su $(-T,T)$. Siccome $\vec{f}$ è C^∞ ne segue che $\vec{v} \in C^\infty((-T,T) \setminus \{o\})^m$. Se $I = (-a, b)$, costruiamo $\vec{\phi} \in C^\infty([\frac{T}{2}, b))^m$ e $\vec{\psi}$ $C^\infty((-a, -T/2])^m$ tali che:

$$
(3.10) \qquad \begin{cases} (t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{\phi} = \vec{f} & \text{su} \quad [T/2, b) \\ \vec{\phi}(T/2) = \vec{v}(T/2) & \\ & \\ (t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{\psi} = \vec{f} & \text{su} \quad (-a, -T/2] \\ \vec{\psi}(-T/2) = \vec{v}(-T/2) & \end{cases}
$$

Ponendo:

$$
(3.11) \qquad \vec{u}(t) = \begin{cases} \vec{v}(t) & , \quad t \in [-T/2, T/2] \\ \vec{\phi}(t) & , \quad t \in [T/2, b[\\ \vec{\psi}(t) & , \quad t \in]-a, -T/2] \end{cases}
$$

si ha che $\vec{u}$ soddisfa quanto richiesto.

q.e.d.

Possiamo ora formulare il risultato principale.

Indicheremo con $\mathcal{D}'_o$ lo spazio dei germi di distribuzioni definite in un interno di $t = 0$. Si ha il

Teorema 2. *Sia* P *un operatore di Fuchs d'ordine* m *e peso* m-k *definito su un intorno* I *di* $t = 0$. *Allora* $P : \mathcal{D}'_o \to \mathcal{D}'_o$ *è suriettiva e* $\dim \operatorname{Ker} P = m + k$.

<u>Prova</u>. Ragioniamo dapprima nel caso m = k e sia $t\,\partial_t\,I_m - A(t)$ il sistema equivalente associato a P. Supponiamo, per cominciare, che l'ipotesi di Fuchs sia soddisfatta. In tal caso basterà provare che $t\,\partial_t\,I_m - A(o) : \mathcal{D}'^m_o \to \mathcal{D}'^m_o$ è suriettiva e che $\dim \mathrm{Ker}(t\,\partial_t\,I_m - A(o)) = 2\,m$. Per semplificare le notazioni scriviamo A in luogo di A_o.

Senza minore generalità, usando il Teorema di Jordan, possiamo supporre che per un certo $\gamma \in C$ sia:

$$(3.12) \qquad A(o) = A = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & & \\ & \lambda & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \varepsilon \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

dove $\varepsilon = \{^0_1$. Ci limitiamo quindi a studiare la suriettività ed il nucleo di $t\,\partial_t\,I_N - \Lambda : \mathcal{D}'^N_o \to \mathcal{D}'^N_o$ (N è la dim. di Λ).

Se B è una matrice N x N della forma (3.12) definiamo le matrici distribuzioni:

$$(3.13) \qquad (t \pm i\,o)^B = \lim_{\varepsilon \to 0\pm} (t + i\,\varepsilon)^B \in \mathcal{D}'(R_t;\ \mathcal{L}(C^N)).$$

Si noti che se $B = \lambda\,I_N$ allora $(t \pm i\,o)^B = (t \pm i\,o)^\lambda\,I_N$. Se invece

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ 0 & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ - & - & - & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(3.13)' \qquad (t\pm io)^{B} = (t\pm io)^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!}\ln(t\pm io) & & \frac{1}{(N-1)!}[\ln(t\pm io)]^{N-1} \\ o & 1 & & \frac{1}{(N-2)!}[\ln(t\pm io)]^{N-2} \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Si noti che $W\,F((t \pm i\,o)^{\lambda})$ e $W\,F(\ln(t \pm i\,o))$ sono dati da $\{(o,\tau)|\tau \gtrless o\}$ e quindi i prodotti indicati hanno senso. Ricordiamo che:

$$(3.13)'' \qquad \ln(t \pm i\,o) = \begin{cases} \ln t \;, & t > 0 \\ \ln|t| \pm i\,\pi \;, & t < 0 \end{cases}$$

Ciò premesso definiamo le matrici distribuzioni:

$$(3.14) \qquad K_{\pm}(t,s) = Y(t - s)\;[(t \pm i\,o)^{\Lambda} \otimes (s \pm i\,o)^{-\Lambda} - I_N] \;,$$

dove $\langle Y(t - s), \vec{\phi}(t,s) \rangle = \iint_{t \geq s} \vec{\phi}(t,s)\,dt\,ds, \; \vec{\phi} \in C_o^{\infty}(R^2)^N$.

Usando il Teorema di moltiplicazione di Hörmander si ha:

$$(3.15) \qquad W\,F'(K_{\pm}) \subset \Delta_{T^*R^2} \cup \{(o,o;\tau,\sigma)|\{{\tau \geq \sigma \atop \tau \leq \sigma}\} \cup \{(t,o;o,\sigma)|\{{\sigma < o \atop \sigma > o}\} \cup \{(o,s;\tau,o)|\{{\tau > o \atop \tau < o}\} \;.$$

Dunque l'operatore $K_{\pm}$ si prolunga con continuità ad ogni $\vec{f} \in E'(R)^m$ per cui $W\,F(\vec{f}) \cap N_{\mp} = \{(o,\sigma)|\{{\sigma < o \atop \sigma > o}\} = \phi$ e $K_{\pm}\,\vec{f} \in \mathcal{D}'(R)^N$ con:

$$(3.16) \qquad W\,F(K_{\pm}\,\vec{f}) \subset W\,F'(K_{\pm}) \circ W\,F(\vec{f}) \cup N_{\pm} \;,$$

in particolare:

(3.17) $$W\,F(K_{\pm}\vec{f}) \cap N_{\mp} = \phi$$

Ora:

$$t\,\partial_t\,K_{\pm}(t,s) = t\,[\partial_t\,Y(t-s)]\,(t \pm i\,o)^{\Lambda} \otimes (s \pm i\,o)^{-\Lambda - I_N}$$

$$+ Y(t-s)\,(t\,\partial_t(t \pm i\,o)^{\Lambda}) \otimes (s \pm i\,o)^{-\Lambda - I}$$

Poiché $$< \partial_t\,Y(t-s), \vec{\phi}(t,s) > = - \iint_{t \geq s} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t,s)\,dt\,ds =$$

$$= - \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t,s)\,dt \right] ds - \int_{-\infty}^{0} \left[\int_s^{+\infty} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}(t,s)\,dt \right] ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} \vec{\phi}(s,s)\,ds + \int_{-\infty}^{0} \vec{\phi}(s,s)\,ds = < \delta(t-s), \vec{\phi}(t,s) >$$

e $t\,\delta(t-s) = \delta(t-s)\,t = \delta(t-s)(t+i\,o)$, ne segue che

$$t\,\partial_t\,K_{\pm}(t,s) = \delta(t-s)\,[(t \pm i\,o)^{\Lambda + I_N} \otimes (s \pm i\,o)^{-\Lambda - I_N}]$$

$$+ \Lambda\,Y(t-s)\,[(t \pm i\,o)^{\Lambda} \otimes (s \pm i\,o)^{-\Lambda - I_N}]\,.$$

Passando agli operatori:

(3.18) $$(t\,\partial_t\,I_N - \Lambda)\,K_{\pm} = I_N$$

Sia ora $\vec{f} \in \mathcal{D}_0'^{N}$, dunque $\vec{f} \in \mathcal{D}'((-T,T))^N$ per qualche $T > 0$. Utilizzando un cut-off si può supporre $\vec{f} \in \mathcal{E}'(R)^N$.

Siano $\chi_+(t,D_t)$, $\chi_-(t,D_x)$ due operatori pseudo-differenziali propri d'ordine o tali che $W\,F(\chi_{\pm}\vec{f}) \cap N_{\mp} = \phi$ e $\vec{f} - (\chi_+\vec{f} + \chi_-\vec{f})$ sia C^{∞}

in un intorno dell'origine. Utilizzando il Corollario 3 si trova $\vec{v} \in L^p(R)^N$, per qualche $p \in (1, +\infty)$ tale che $(t\,\partial_t\, I_N - \Lambda)\,\vec{v} = \vec{f} - (\chi_+\,\vec{f} + \chi_-\,\vec{f})$ in un intorno di $t = 0$.

Poniamo $\vec{u} = \vec{v} + K_+\,\vec{f}_+ + K_-\,\vec{f}_-$, allora $\vec{u} \in \mathcal{D}'(R)^N$ e $(t\,\partial_t\, I_N - \Lambda)\,\vec{u} = \vec{f}$ in un intorno di $t = 0$.

Di conseguenza $(t\,\partial_t\, I_N - \Lambda) : \mathcal{D}_0'^N \to \mathcal{D}_0'^N$ è suriettivo. Sia ora $\vec{u} \in \mathcal{D}'(-T,T)^N$ tale che $(t\,\partial_t\, I_N - \Lambda)\,\vec{u} = 0$ su $(-T,T)$. Per $t \neq 0$ $\vec{u} \in C^\infty$ e sarà del tipo:

$$(3.19) \qquad u(t) = \begin{cases} t^\Lambda\, \alpha & , \quad t > 0 \\ |t|^\Lambda\, \beta & , \quad t < 0 \end{cases}$$

per certi vettori $\alpha, \beta \in C^N$.

L'idea è di recuperare $\vec{u}$ (o piuttosto il suo germe) in $\mathcal{D}_0'^N$ come una combinazione lineare di $(t + i\,o)^\Lambda$, $(t - i\,o)^\Lambda$.

Consideriamo quindi:

$$(3.20) \qquad \vec{v}(t) = (t + i\,o)^\Lambda\, a + (t - i\,o)^\Lambda\, b \quad , \qquad a, b \in C^N$$

Ora si ha:

$$(3.21) \qquad (t \pm i\,o)^\Lambda = \begin{cases} t^\Lambda & , \quad t > 0 \\ |t|^\Lambda\, e^{\pm i\pi\Lambda} & , \quad t < 0 . \end{cases}$$

Sicché si devono scegliere $a, b \in C^N$ in modo tale che $a + b = \alpha$ e $a + e^{-2\pi i\,\Lambda}\, b = e^{-i\pi\Lambda}\,\beta$ e questo è possibile univocamente se e solo se $\lambda \notin Z$. Dunque se $\lambda \notin Z$,

$$(3.22)\qquad \vec{v}(t)|_{t\neq 0} = (t + i\,o)^{\Lambda}\, a + (t - i\,o)^{\Lambda}\, b|_{t\neq 0}$$

Si tratta di vedere se il sistema omogeneo $t\,\partial_t\, I_N - \Lambda$ ha una soluzione con supporto in $t = 0$. Una tale $\vec{v}(t)$ è del tipo $\vec{v}(t) = \sum_{k\leq r} \delta_t^{(k)}\, c_k$ $c_k \in C^N$. Se $\Lambda = \lambda\, I_N$, poiché $t\,\partial_t\, \delta_t^{(k)} = -\,(k + 1)\,\delta_t^{(k)}$, ne segue che $\lambda \in \{-1,-2,\ldots\}$, che abbiamo escluso. Se Λ è in forma di Jordan non diagonale, l'ultima equazione è $t\,\partial_t\, v_N = \lambda\, v_N$ e quindi ancora $\lambda \in \{-1,-2,\ldots\}$, caso escluso.

Prendiamo ora il caso $\lambda \in Z_+$ allora

$$(3.23)\qquad \vec{v}(t)|_{t\neq 0} = t_+^{\Lambda}\,\alpha + t_-^{\Lambda}\,\beta|_{t\neq 0}$$

dove

$$< t_+^{\Lambda}, \vec{\phi} > = \int_0^{+\infty} t^{\Lambda}\,\vec{\phi}(t)\,dt,\quad < t_-^{\Lambda}, \vec{\phi} > = \int_{-\infty}^{0} |t|^{\Lambda}\,\vec{\phi}(t)\,dt\,,$$

per $\vec{\phi} \in C_0^{\infty}(R)^N$.

Resta da considerare il caso $\lambda \in \{-1,-2,\ldots\}$.

Se $\Lambda = \lambda\, I_N$ allora il sistema è:

$$(3.24)\qquad t\,\partial_t\, v_j - \lambda\, v_j = 0\,,\qquad j = 1,\ldots,N\,.$$

Ciò richiede, se $\lambda = -\,n$:

$$(3.25)\qquad \vec{v} = t^{-n}\, I_N\,\alpha + \delta_t^{(n-1)}\, I_N\,\beta\,,$$

per certi $\alpha, \beta \in C^N$. D'altra parte:

$$(t \pm i\,o)^{\Lambda} = (t \pm i\,o)^{\lambda}\, I_N = (t^{-n} \mp i\,\pi\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta_t^{(n-1)})\, I_N\,.$$

Dunque, in tal caso,

$$\vec{v} = (t + i\,o)^{\Lambda} a + (t - i\,o)^{\Lambda} b \,, \tag{3.26}$$

per due vettori, a b $\in C^N$ univocamente determinati.

(si prende $a + b = \alpha$, $\quad i\,\pi \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\;(b - a) = \beta$).

Supponiamo ora che Λ sia nella forma di Jordan non diagonale:

$$\begin{cases} t\,\partial_t\, v_j = \lambda\, v_j + v_{j+1} \,, & j = 1,\dots,N-1 \\ t\,\partial_t\, v_N = \lambda\, v_N \end{cases} \tag{3.27}$$

Farò il ragionamento se $N = 2$ e $\lambda = -1$.

Un calcolo mostra che

$$(t \pm i\,o)^{-1} \ln(t \pm i\,o) = \frac{1}{t} \ln|t| \pm i\,\pi\, g - \pi^2\, \delta \,, \tag{3.28}$$

dove

$$\text{(3.28)'} \qquad \langle g, \phi \rangle = \int_{-1}^{o} \frac{\phi(t) - \phi(o)}{t}\, dt + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\phi(t)}{t}\, dt$$

Quindi, se $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ o & -1 \end{pmatrix}$,

$$(t \pm i\,o)^{\Lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \mp i\,\pi\,\delta & \frac{1}{t} \ln|t| \pm i\,\pi\, g - \pi^2\,\delta \\ o & \frac{1}{t} \mp i\,\pi\,\delta \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

si noti che $t\,\partial_t\, g = -g - \delta$.

Se v_1, v_2 risolvono (3.27), allora v_2 è necessariamente del tipo:

(3.30) $$v_2(t) = \alpha_2 \frac{1}{t} + \gamma\, \delta_t\,, \qquad \text{per certi } \alpha_2, \gamma \in C\,.$$

Siccome $t\, \partial_t\, v_1 = -v_1 + v_2$, allora per $t \neq 0$:

(3.31) $$v_1(t) = \begin{cases} \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t|\,, & t > 0 \\ \hat{\alpha}_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t|\,, & t < 0 \end{cases}\,,$$

per certi α_1, $\hat{\alpha}_1 \in C$; (3.31) si scrive

$$v_1(t) = \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t| + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1)\, g\,, \qquad \text{per } t \neq 0\,.$$

In conclusione:

(3.32) $$v_1(t) = \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t| + (\hat{\alpha}_1 - \alpha_1)\, g + \beta\, \delta_t\,,$$

per qualche $\beta \in C$.

Imponendo di soddisfare il sistema, si ha $-(\hat{\alpha}_1 - \alpha_1) = \gamma$, i.e. $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 - \gamma$. Concludendo:

(3.33) $$\begin{cases} v_1(t) = \alpha_1 \frac{1}{t} + \alpha_2 \frac{1}{t} \ln|t| - \gamma\, g + \beta\, \delta_t \\ v_2(t) = \alpha_2 \frac{1}{t} + \gamma\, \delta_t \end{cases}$$

E' facile vedere che (3.33) si può scrivere nella forma $(t + i\, o)^{\Lambda}\, a + (t - i\, o)^{\Lambda}\, b$ con $a, b \in C^2$, univocamente determinati.

L'argomento può essere fatto in generale e quindi si conclude che $\mathrm{Ker}(t\, \partial_t\, I_N - \Lambda)$ come operatore da $\mathcal{D}_o'^{N}$ in sè è generato dai germi corrispondenti a $(t \pm i\, o)^{\Lambda}$, se $\lambda \notin Z_+$ e da $t_{\pm}^{\Lambda}$ se $\lambda \in Z_+$.

Dunque, se vale la condizione di Fuchs, il nucleo di

$t\,\partial_t I_m - A(t)$ come operatore da $\mathcal{D}'^N_o$ in sè ha dimensione 2 m.

Vediamo ora come si toglie la condizione di Fuchs.

Risolubilità. Possiamo supporre di avere $\vec{f} \in \mathcal{E}'(R)^m$ con $\vec{f} = \vec{g} + \vec{f}_+ + \vec{f}_-$, $\vec{g} \in C^\infty((-T,T))^m$ per qualche $T > 0$ e $\vec{f}_\pm \in \mathcal{E}'(R)^m$, con $W\,F(\vec{f}_\pm) \cap N_{\mp} = \phi$.

Per il Corollario 3 esiste $\vec{v} \in L^p(R)^m$ (per qualche p) con $(t\,\partial_t I_m - A(t))\,\vec{v} = \vec{g}$ su un intorno di $t = 0$.

Ragioniamo ora su $\vec{f}_+$; supporremo che $A(t)$ sia della forma $\hat{A}(t)$, (1.19), (1.19)'; associamo a $t\,\partial_t I_m - \hat{A}(t)$ il sistema $t\,\partial_t I_m - A^\#(t)$ dove $A^\#(o)$ ha il solo autovalore μ. Dunque, per quanto visto prima, esiste $\vec{v}_+(t)$ con $W\,F(\vec{v}_+(t)) \cap N_- = \phi$ tale che $(t\,\partial_t I_m - A^\#(t))\,\vec{v}_+(t) = \tilde{\vec{f}}_+(t)$ in un intorno di $t = 0$ ($\tilde{f}_+$ si ottiene da f_+ facendo le trasformazioni lineari che fanno passare da $\hat{A}(t)$ ad $A^\#(t)$). Ragioniamo ora per semplicità sul caso $l = 2$. Abbiamo quindi:

$$
(3.34)\qquad \begin{cases} t\,\partial_t \vec{v}_1 = \alpha(t)\,\vec{v}_1 + \tilde{\beta}(t)\,\vec{v}_2 + \vec{f}_{1+} \\ t\,\partial_t \vec{v}_2 = t\,\gamma(t)\,\vec{v}_1 + (\delta(t) + I)\,\vec{v}_2 + t\,\vec{f}_{2+} \end{cases}
$$

ora poniamo $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$ e $\vec{u}_2 = (t + i\,o)^{-1}\,\vec{v}_2$ notando che il prodotto è ben definito perché $W\,F(\vec{v}_2) \cap N_- = \phi$! allora $t\,\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ e quindi;
$t\,\partial_t \vec{u}_1 = \alpha(t)\,\vec{u}_1 + t\,\tilde{\beta}(t)\,\vec{u}_2 + \vec{f}_{1+}$, mentre $t\,\partial_t \vec{u}_2 = [t\,\partial_t (t + i\,o)^{-1}]\,\vec{v}_2 + (t + i\,o)^{-1}\,t\,\partial_t \vec{v}_2 = -\vec{u}_2 + \gamma(t)\,\vec{u}_1 + (\delta(t) + I)\,\vec{u}_2 + \vec{f}_{2+} = \gamma(t)\,\vec{u}_1 + \delta(t)\,\vec{u}_2 + \vec{f}_{2+}$. Concludendo, $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ risolvere il sistema.
Discorso analogo per $\vec{f}_-$. Resta così provato che $t\,\partial_t I_m - A(t) : \mathcal{D}'^m_o \to \mathcal{D}'^m_o$ è suriettivo.

Modificando un po' l'argomento fatto nel caso in cui la condizione di Fuchs è soddisfatta si vede ancora che $\mathrm{Ker}(t\,\partial_t I_m - A(t))$ ha dimensione 2 m in $\mathcal{D}'_o$.

Resta, infine, il caso $m > k$.

Poniamo $\hat{P} = t^{m-k}\,P$. $\hat{P}$ è un Fuchsiano d'ordine m e peso o. Dico

che la successione:

$$(3.35) \qquad o \to \mathrm{Ker}\, P \to \mathrm{Ker}\, \hat{P} \overset{P}{\to} \mathrm{Ker}\, t^{m-k} \to o$$

è esatta.

Si ha:

$$\mathrm{Ker}\, t^{m-k} = \{u \quad \mathcal{D}'_o | t^{m-k} u = 0\} =$$

$$= \{u \quad \mathcal{D}'_o | u \sim \sum_{j=0}^{m-k-1} c_j \delta_t^{(j)} , \quad (c_o, \dots, c_{m-k-1}) \in C^{m-k}\} ,$$

sicché dim Ker $t^{m-k} = m-k$.

D'altra parte $P : \mathrm{Ker}\, \hat{P} \to \mathrm{Ker}\, t^{m-k}$ è suriettiva. Infatti data $\Sigma\ c_j\ \delta_t^{(j)}$ esiste $u \in \mathcal{D}'_o$, $Pu \sim \Sigma\, c_j\ \delta_t^{(j)}$ e quindi $t^{m-k}\ Pu = \hat{P}u = 0$. Dunque (3.35) è vera. Allora

$$(3.35)' \qquad \mathrm{Ker}\, \hat{P}/\mathrm{Ker}\, t^{m-k} \simeq \mathrm{Ker}\, P$$

e quindi dim Ker $P = 2\,m - (m-k) = m + k$.

q.e.d.